1st PolyMath Olympiad

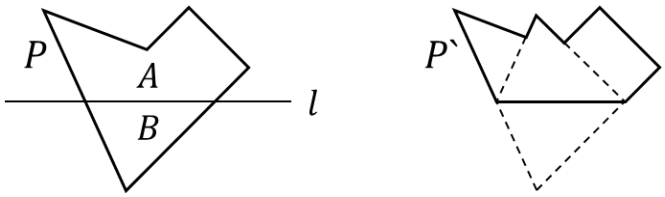
Section 1

일요일, 2020년 8월 8일

문제 1. 아래의 곱셈식에서 A,B는 두 자리 자연수이고, C는 다섯 자리 자연수이다. 식이 성립하도록 하는 A,B,C를 모두 구하여라.

$$A \times B + 199 = C$$

문제 2. "종이접기" 시행이란, 다음과 같이 다각형 P를 P`로 바꾸는 시행이라 정의한다.



왼쪽 그림과 같이 다각형 P의 내부를 지나는 직선 l을 잡는다. l은 다각형 P를 두 부분 A와 B로 나누게 되고, A와 B중 한 부분을 골라 l에 대하여 대칭시킨다. 그 후, A와 B가 이루는 영역(오른쪽 그림에서 굵은 선으로 표시된 다각형) 을 P`이라고 하자.

한 변의 길이가 1인 정사각형에서 "종이접기" 시행을 몇 번 하여 넓이가 $\frac{1}{2020}$인 다각형을 만들려고 한다. 필요한 시행 횟수의 최솟값을 구하여라.

문제 3. 양의 정수 n가 주어져 있다. 음 아닌 정수로 이루어진 무한수열 $a_1, a_2, a_3, \ldots$가 모든 양의 정수 i에 대해 다음 조건을 만족한다.

-조건 1. $a_i = 0$이면 $a_{i+1} = 0$이다.

-조건 2. $a_i > 0$이면 $a_{i+1} = (n$*을* a_i*로 나눈 나머지*$)$이다.

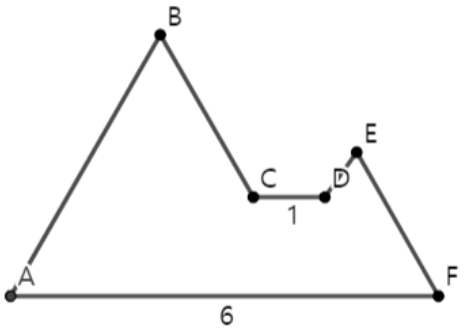
이 때, 수열에서 양의 정수인 항은 $2\lceil\sqrt{n}\rceil$개 이하임을 보여라. 단, $\lceil x\rceil$는 x를 올림한 값을 의미한다.

1st PolyMath Olympiad

Section 2

일요일, 2020년 8월 8일

문제 4. 아래 그림의 육각형에서 내각 A,B,E,F의 크기는 60도이고, 내각 C,D의 크기는 240도이다. 변 AF의 길이를 6, CD의 길이를 1이라 하자. 육각형의 둘레의 길이를 구하여라.



문제 5. 임의의 1보다 큰 홀수 a에 대하여, 적당한 양의 정수 b를 잘 잡으면 이차함수

$$f(x) = x^2 + ax + b$$

에 대하여 $f(1), f(2), f(3), \ldots, f(n)$를 전부 곱했을 때 완전제곱수가 되도록 하는 n이 무한히 많도록 할 수 있음을 보여라.

문제 6. 양의 정수 n에 대하여, 가로 n칸, 세로 n칸으로 이루어진 표에 n^2개의 수들이 적혀있다. 각 세로줄에 대해 적힌 수들의 중앙값이 모두 같고, 각 가로줄은 왼쪽에서 오른쪽으로 읽었을 때 수들이 일정하게 증가하거나, 일정하게 감소했다. 이 때, 일정하게 증가하는 가로줄의 수는 최대 몇 개인가?