



1st PolyMath
Olympiad

폴이

문제 1. 아래의 곱셈식에서 A,B는 두 자리 자연수이고, C는 다섯 자리 자연수이다. 식이 성립하도록 하는 A,B,C를 모두 구하여라.

$$A \times B + 199 = C$$

정답) A=99, B=99, C=10000

폴이)

두 자리 수 $\times$ 두 자리 수의 곱셈에서 결과가 가장 클 때는 99와 99를 곱했을 때이다. 이때 $99 \times 99 + 199 = 10000$ 으로 [1]

(A,B,C)는 (99,99,10000)이 가능하다. [2]

A나 B가 둘 다 99가 아닌 경우는 C가 10000보다 작게 되어 다섯 자리 수가 될 수 없다. [3]

채점 기준)

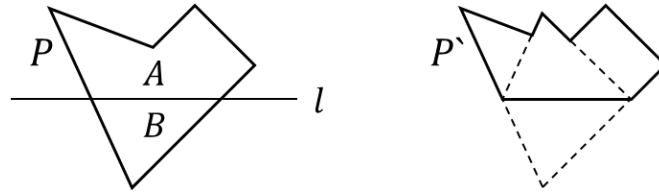
[1]은 누락되어도 감점하지 않는다.

[2]: 배점 4점

[3]: 배점 3점

틀린 정답을 추가로 적었을 경우 개당 2점 감점

문제 2. “종이접기” 시행이란, 다음과 같이 다각형 P 를 P' 로 바꾸는 시행이라 정의한다.



왼쪽 그림과 같이 다각형 P 의 내부를 지나는 직선 l 을 잡는다. l 은 다각형 P 를 두 부분 A 와 B 로 나누게 되고, A 와 B 중 한 부분을 골라 l 에 대하여 대칭시킨다. 그 후, A 와 B 가 이루는 영역(오른쪽 그림에서 굵은 선으로 표시된 다각형)을 P' 이라고 하자.

한 변의 길이가 1인 정사각형에서 “종이접기” 시행을 몇 번 하여 넓이가 $\frac{1}{2020}$ 인 다각형을 만들려고 한다. 필요한 시행 횟수의 최솟값을 구하여라.

정답) 11

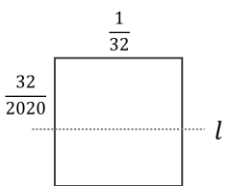
풀이)

P 의 넓이 = A 의 넓이 + B 의 넓이다. 따라서 A 와 B 중에 적어도 하나는 넓이가 P 의 넓이의 절반 이상이다. P' 는 A 와 B 를 겹쳐놓은 것이므로 P' 는 넓이가 A 이상이고, B 이상이다. 따라서 P' 의 넓이는 P 의 절반 이상이다. [1]

“종이접기” 시행을 한 번 할 때마다 다각형의 넓이는 작아봐야 기존의 절반으로 줄기 때문에, 한 변의 길이가 1인 정사각형에서 10번의 시행을 하였을 때 넓이는 최소

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{10} = \frac{1}{1024} \text{이므로 } \frac{1}{2020} \text{이 될 수 없다. [2]}$$

11번의 시행으로 $\frac{1}{2020}$ 을 만들려면, 정사각형을 반으로 10번 접은 뒤,



위 그림의 l 을 따라 “종이접기” 시행을 하면 된다. [3]

채점 기준)

[1] 배점 2점, 설명이 불명확할 경우 1점을 감점한다.

[2] 배점 2점

[3] 배점 3점, 엄밀하지 않게 서술할 경우 2점을 감점한다.

계산 실수만의 이유로 다른 정답일 시 2점을 감점한다.

문제 3. 양의 정수 n 가 주어져 있다. 음 아닌 정수로 이루어진 무한수열 $a_1, a_2, a_3, \dots$ 가 모든 양의 정수 i 에 대해 다음 조건을 만족한다.

-조건 1. $a_i = 0$ 이면 $a_{i+1} = 0$ 이다.

-조건 2. $a_i > 0$ 이면 $a_{i+1} = (n \text{을 } a_i \text{로 나눈 나머지})$ 이다.

이 때, 수열에서 양의 정수인 항은 $2\lceil\sqrt{n}\rceil$ 개 이하임을 보여라. 단, $\lceil x \rceil$ 는 x 를 올림한 값을 의미한다.

풀이)

a_i 로 나눈 나머지는 a_i 보다 작으므로 수열 $a_1, a_2, a_3, \dots$ 는 0이 될 때까지 감소하는 수열이다. [1]

a_i, a_{i+1} 이 모두 양의 정수일 때, n 을 a_i 로 나눈 몫을 p 라고 하면 $n = pa_i + a_{i+1}$ 형태로 나타낼 수 있다. [2*] 이 때, $n = pa_i + a_{i+1} > pa_{i+1} + a_{i+1} = (p+1)a_{i+1}$ 이므로 n 을 a_{i+1} 로 나눈 몫은 $p+1$ 이상이다. [2]

n 을 a_i 로 나눈 몫이 계속 증가하므로, n 을 $a_{\lceil\sqrt{n}\rceil+1}$ 로 나눈 몫은 $\lceil\sqrt{n}\rceil$ 이상이다.

$n \geq \lceil\sqrt{n}\rceil \cdot a_{\lceil\sqrt{n}\rceil+1}$ 이므로 $a_{\lceil\sqrt{n}\rceil+1}$ 는 $\lceil\sqrt{n}\rceil$ 이하이다. $a_1, a_2, a_3, \dots$ 는 감소하는 수열이므로 $a_{2\lceil\sqrt{n}\rceil+1}$ 은 반드시 0이 되어야 한다. 따라서 양의 정수인 항은 $2\lceil\sqrt{n}\rceil$ 개 이하이다. [3]

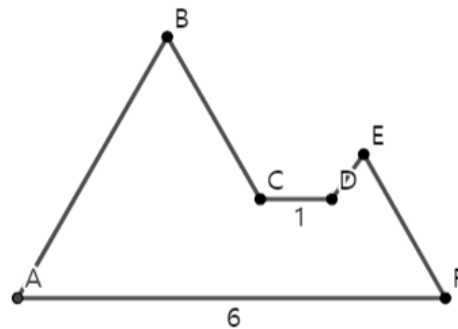
채점 기준)

[1]: 배점 1 점

[2]: 배점 3 점, [2*]가 드러났을 경우 1 점

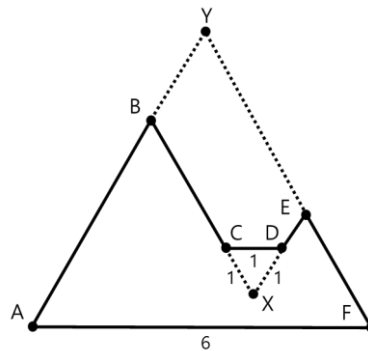
[3]: 배점 3 점, 부등식이 엄밀하지 않을 경우 1 점을 감점한다.

문제 4. 아래 그림의 육각형에서 내각 A,B,E,F의 크기는 60도이고, 내각 C,D의 크기는 240도이다. 변 AF의 길이를 6, CD의 길이를 1이라 하자. 육각형의 둘레의 길이를 구하여라.



정답) 17

풀이)



삼각형 CDX 가 정삼각형이 되도록 점 X 를 잡자. CX 와 DX 의 길이가 모두 1 이므로 오각형 ABXEF 의 둘레는 육각형 ABCDEF 의 둘레보다 1 길다. [1]

사각형 XBYE 가 평행사변형이 되도록 점 Y 를 잡자. 평행사변형의 마주보는 변의 길이는 서로 같으므로 오각형 ABXEF 의 둘레는 삼각형 AYF 의 둘레와 같다. [2]

그런데 삼각형 AYF 는 한 변의 길이가 6 인 정삼각형이므로 둘레가 18 이다. 따라서 육각형 ABCDEF 의 둘레는 $18-1=17$ 이다. [3]

채점 기준)

풀이가 다양할 수 있다. 풀이가 맞을 경우 7 점 만점을 부여하고, 정답만 썼을 경우 3 점을 부여한다. 단순 계산 실수는 3 점을 감점한다.

풀이가 엄밀하지 않으면 1~4 점을 감점하고, 답도 틀리고 풀이에도 논리적 오류가 있으면 0 점 처리한다.

문제 5. 임의의 1보다 큰 홀수 a 에 대하여, 적당한 양의 정수 b 를 잘 잡으면 이차함수

$$f(x) = x^2 + ax + b$$

에 대하여 $f(1), f(2), f(3), \dots, f(n)$ 를 전부 곱했을 때 완전제곱수가 되도록 하는 n 이 무한히 많도록 할 수 있음을 보여라.

풀이)

홀수 $a = 2k + 1$ 과 같이 나타내자. $b = k(k + 1)$ 이면 항상 가능함을 보일 것이다.

그 때 $f(x) = x^2 + ax + b = x^2 + (2k + 1)x + k(k + 1) = (x + k)(x + k + 1)$ 이다. [1]

이 때, $f(1), f(2), f(3), \dots, f(n)$ 를 전부 곱한 값은

$(k + 1)(k + 2)(k + 2)(k + 3)(k + 3) \dots (k + n)(k + n)(k + n + 1)$ 가 된다.

따라서 $(k + 1)(k + n + 1)$ 이 완전제곱수이면 나머지 항은 두 번씩 등장하므로 전체도 완전제곱수가 된다. [2]

1보다 큰 정수 t 에 대해 $n = (t^2 - 1)(k + 1)$ 이면 $(k + 1)(k + n + 1) = (k + 1)^2 t^2$ 이므로 완전제곱수가 된다. 따라서 문제의 조건을 만족하는 n 이 무한히 많다. [3]

채점 기준)

[1]: 배점 2점, 인수분해가 가능한 경우에 대해 언급만 했더라도 주어진 점수 부여

[2]: 배점 3점

[3]: 배점 2점

문제 6. 양의 정수 n 에 대하여, 가로 n 칸, 세로 n 칸으로 이루어진 표에 n^2 개의 수들이 적혀있다. 각 세로줄에 대해 적힌 수들의 중앙값이 모두 같고, 각 가로줄은 왼쪽에서 오른쪽으로 읽었을 때 수들이 일정하게 증가하거나, 일정하게 감소했다. 이 때, 일정하게 증가하는 가로줄의 수는 최대 몇 개인가?

정답) n 이 짝수일 때 $n-1$, n 이 홀수일 때 $\frac{n+1}{2}$

풀이)

n 이 짝수일 때는 $n = 2k$ 와 같이 나타내자.

세로줄에 적힌 수들의 중앙값은 k 번째로 큰 수와, $k+1$ 번째로 큰 수의 평균이다.

$2k$ 개의 가로줄이 전부 일정하게 증가한다면, 각 세로줄에서 k 번째로 큰 수도 점점 증가하고, $k+1$ 번째로 큰 수도 점점 증가한다. 따라서 중앙값이 점점 증가하므로, 모두 같을 수 없다. [1]

다음은 $2k-1$ 개의 가로줄만 일정하게 증가하고 중앙값이 0으로 모두 같은 경우이므로 최댓값은 $2k-1$, 즉 $n-1$ 개이다.

k개	1	2	3	...	$2k-1$	$2k$
	1	2	3	...	$2k-1$	$2k$
	...	...	...	...	...	...
	1	2	3	...	$2k-1$	$2k$
k개	-1	-2	-3	...	$-(2k-1)$	$-2k$
	$-4k$	$-(4k-1)$	$-(4k-2)$	...	$-(2k+1)$	$-2k$
	$-4k$	$-(4k-1)$	$-(4k-2)$	...	$-(2k+1)$	$-2k$
	$-4k$	$-(4k-1)$	$-(4k-2)$	...	$-(2k+1)$	$-2k$

[2]

n 이 홀수일 때는 $n = 2k + 1$ 과 같이 나타내자.

세로줄에 적힌 수들의 중앙값은 $k+1$ 번째로 큰 수이다.

중앙값이 적힌 칸들을 모두 빨간색으로 칠하자. 각 세로줄마다 빨간 칸이 적어도 하나씩 존재한다. 따라서 빨간 칸은 $2k+1$ 개 이상이다. 또, 어떤 가로줄에 빨간 칸이 두 개 이상이라면, 중앙값이 모두 같다는 조건에 의해 해당 가로줄에는 모두 같은 수가 적혀 있어야 하므로 모순이다. 따라서 빨간 칸은 $2k+1$ 개 이하이다. 그러므로 빨간 칸은 정확히 $2k+1$ 개이고, 각 가로줄과 세로줄마다 빨간 칸이 정확히 하나씩 있어야 한다.

중앙값들을 M 이라 하자. 첫 번째 세로줄에서 M 이 적힌 칸이 하나이고, 이는 $k+1$ 번째로 큰 수이므로 M 보다 큰 수가 적힌 칸이 k 개 있다. 해당 칸들을 포함하는 가로줄은 오른쪽 어딘가에 빨간 칸(M 이 적혀있음)이 존재하므로 일정하게 감소해야 한다. 따라서 감소하는 가로줄이 k 개 이상. 증가하는 가로줄은 최대 $k+1$ 개이다. [3]

0	1	2	...	$2k-1$	$2k$
1	0	-1	...	$-(2k-2)$	$-(2k-1)$
-2	-1	0	...	$2k-3$	$2k-2$
3	2	1	...	$-(2k-4)$	$-(2k-3)$
...	...	...	...	...	...
$2k-1$	$2k-2$	$2k-3$	...	0	-1
$-2k$	$-(2k-1)$	$-(2k-2)$	...	-1	0

그림처럼 증가하는 가로줄과 감소하는 가로줄이 번갈아 가며 나와야 한다. 그럴 경우, 각 세로줄마다 양수 k 개, 0, 음수 k 개가 나와 중앙값이 0으로 일정하게 된다. 이 경우가 증가하는 가로줄이 $k+1=\frac{n+1}{2}$ 개인 예시가 된다. [4]

채점 기준)

[1]: 배점 1점

[2]: 배점 1점

[3]: 배점 3점

[4]: 배점 2점, 증가하는 가로줄과 감소하는 가로줄이 번갈아 나온다는 것이 드러나지 않을 경우 주어진 점수를 얻지 못한다.

실례에서 사소한 오류가 있을 경우 1점을 감점한다.