

4월호 논술 문제 풀이

November 21, 2019

Figure-1에 그려진 정육면체의 대각선과 평면 BDE, 평면 CFH가 만나는 점을 각각 점 P, Q라고 하면, $\overline{AB} = 2$ 이므로 $\overline{AP} = \overline{GQ} = \frac{2}{\sqrt{3}}$ 이다.

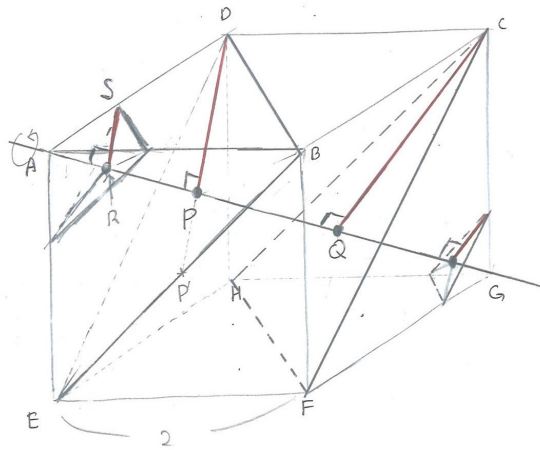


Figure 1: 정육면체와 대각선

회전하는 정육면체에 의해 일조권이 침해받는 영역은 대각선을 회전축으로 하여 정육면체를 회전시킨 입체도형의 그림자의 영역과 같다. 이 회전체가 만드는 그림자의 모양을 알기 위해, 대각선에 수직이며 대각선 위의 점 R을 지나는 평면과 정육면체의 교선을 알아보도록 하자. 점 R이 선분 $\overline{AP}$ 위에 있을 경우 Figure-1에 그려진 것 처럼 교선이 나타난다. 따라서 이 부분에 대한 정육면체의 회전체는 선분 $\overline{RS}$ 를 회전시켜 얻은 원판을 모은 것과 같고, 이 부분의 그림자는 원판들의 모임의 그림자와 같다. 여기서 $\overline{DP} = \frac{2}{3}\overline{DP'} = \frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\overline{DB} = \frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 2\sqrt{2} = \sqrt{2}\overline{AP}$

이고 두 삼각형 $\triangle ARS, \triangle APD$ 가 서로 닮았으므로, $\overline{RS} = \sqrt{2} \cdot \overline{AR}$ 이다. 점 R 이 선분 $\overline{GQ}$ 위에 있을 때에도 동일한 방법으로 그림자의 모양을 알 수 있다.

점 R 이 선분 $\overline{PQ}$ 위에 있다고 하자. 이 경우, 대각선에 수직이며 점 R 을 지나는 평면과 정육면체와의 교선은 Figure-2에 나타난 육각형과 같다. 따라서 이 부분에 대해 정육면체의

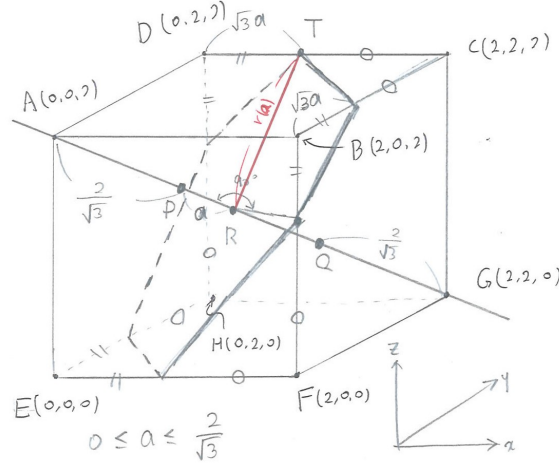


Figure 2: 점 R 이 선분 $\overline{PQ}$ 위에 있는 경우

회전체는 육각형의 한 꼭짓점 T 와 점 R 을 이은 선분을 회전하여 얻은 원판을 모은 것과 같고, 정육면체의 그림자는 이 원판들의 모임의 그림자와 같다.

정육면체의 여덟 꼭짓점의 좌표를 Figure-2에 주어진 것처럼 정하고, $a = \overline{PR}$ ($0 \leq a \leq \frac{2}{\sqrt{3}}$) 이라고 하자. 그러면 점 R, T 의 좌표는 각각

$$R\left(\frac{2}{3} + \frac{a}{\sqrt{3}}, \frac{2}{3} + \frac{a}{\sqrt{3}}, \frac{4}{3} - \frac{a}{\sqrt{3}}\right), \quad T(\sqrt{3}a, 2, 2)$$

이다. 따라서 선분 RT 의 길이 $r(a)$ 는

$$r(a) = \overline{RT} = \sqrt{\left(\frac{2}{3} - \frac{2a}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(-\frac{4}{3} + \frac{a}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(-\frac{2}{3} - \frac{a}{\sqrt{3}}\right)^2} = \sqrt{2\left(a - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + 2}$$

이다. 여기서 $x = a - \frac{1}{\sqrt{3}}, y = r(a)$ ($-\frac{1}{\sqrt{3}} \leq x \leq \frac{1}{\sqrt{3}}$)으로 두면,

$$2x^2 - y^2 = -2 \quad (1)$$

이다.

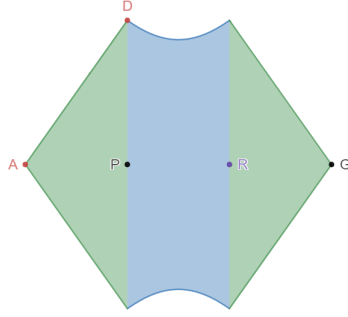


Figure 3: 정육면체의 회전체가 만드는 그림자

지금까지의 결론을 바탕으로 그림자를 그리면 Figure-3과 같다.

$\overline{AP} = \frac{2}{\sqrt{3}}, \overline{PD} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ 이므로, 초록색 영역 하나의 넓이 A 는 $A = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{2}}{3}$ 이다.
파란색 영역의 넓이의 절반 B 는 식-1에 의해

$$B = \int_{-\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\frac{1}{\sqrt{3}}} y \, dx = 2\sqrt{2} \int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \sqrt{1+x^2} \, dx$$

이다. $x = \tan t$ 라고 하면

$$B = 2\sqrt{2} \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sqrt{\sec^2 t} (\sec^2 t \, dt) = 2\sqrt{2} \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sec^3 t \, dt$$

이다. 그런데

$$\int \sec^3 x \, dx = \frac{1}{2} (\sec x \tan x + \ln |\sec x + \tan x|) + C \quad (C \text{는 적분 상수})$$

이므로,

$$B = \sqrt{2} \left(\frac{2}{3} + \ln \sqrt{3} \right)$$

이다. 그러므로 회전체에 의한 그림자의 넓이는 $2(A+B) = \sqrt{2}(4 + \ln 3)(\text{km}^2)$ 이고, 일조권을 침해받는 사람의 수는 $\sqrt{2}(4 + \ln 3) \cdot 10,000 > 70,000$ 를 만족시킨다.