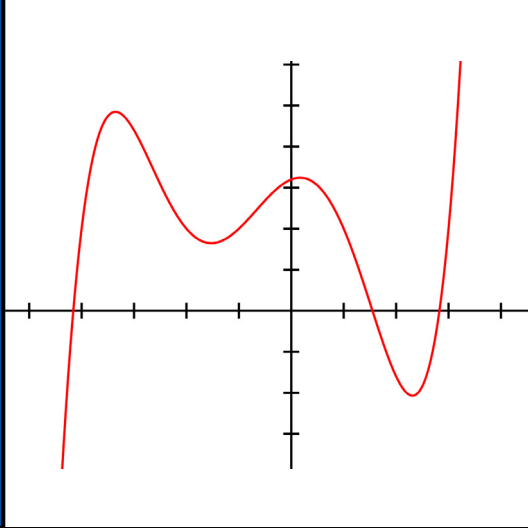


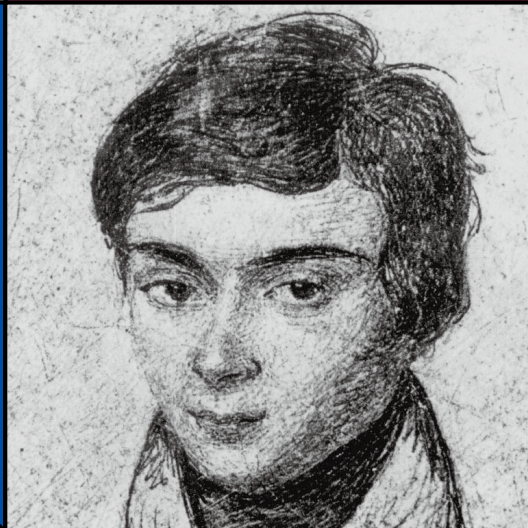


옥스퍼드 박사의 수학 로그

-제4화-

방정식의 근과 대칭은 무슨 사이?

이름 이승재
학력 영국 옥스퍼드대학교 수학과 학사, 석사, 박사
현재 독일 빌레펠트대학교 수학과 박사후연구원
관심사 노래, 축구, 게임
앞으로 '수학자의 삶은 어떨까?'라는 질문의 답을 자극히 개인적인 1인칭 시점으로 전달합니다.



위키미디어

‘5차 이상의 방정식에선 근의 공식이 없다’라는 말을 들어보셨죠? 19세기 두 비운의 수학자 닐스 헨리크 아벨과 에바리스트 갈루아가 밝힌 사실입니다. 이들의 연구는 군론의 토대가 되었는데요, 오늘은 군론과 방정식 사이에 어떤 관계가 있는지 보여드리려고 합니다.

글·사진 이승재(독일 빌레펠트대학교 수학과 박사후연구원) 진행 조가현 기자(gahyun@donga.com) 디자인 이하연



갈루아를 기념하는 비석이에요. 갈루아는 일반 공동묘지에 묻혀 실제 그의 무덤이 어디에 있는지는 알 수 없다고 해요.

갈루아는 편지를 참 많이 썼는데요, 죽기 바로 직전 동료인 오귀스트 슈발리에에게 자신의 연구를 편지로 적어 보냈어요. 덕분에 갈루아의 업적을 우리가 알게 됐죠.

Beachboy68(w)

방정식은 어떤 미지수를 포함하는 등식을 말합니다. 방정식을 푼다는 것은 이 등식을 만족하는 미지수를 구하는 것이죠. 지금 지갑에 8000원이 있다고 가정해봅시다. 1만 원을 모으기 위해선 얼마가 더 필요할까요? 2000원이 더 필요하겠죠. 이를 방정식으로 나타내면 $8000+x=10000$ 입니다. 방정식을 푼다는 건 곧 8000원을 1만 원으로 만들 어떤 미지수 x 를 구하는 일입니다.

일차 방정식은 방금 보신 것처럼 우리가 풀어야 하는 방정식에서 미지수 x 의 최대 차수가 1인 방정식을 말합니다. 나아가 n 차 방정식은 미지수의 최대 차수가 n 인 방정식을 뜻하죠. 미지수가 꼭 하나일 필요는 없습니다. 그렇지만 오늘 다룰 방정식은 모두 미지수가 하나인 방정식입니다.

하나, 둘, 셋, 넷..., 눈앞에 있는 물건을 헤아리는 건 인류의 기본적인 생존 본능 중 하나입니다. 이렇게 하나씩 세는 수를 우리는 ‘자연수’라고 부릅니다.

하지만 자연수만으로는 표현할 수 있는 수가 너무 제한적이었습니다. ‘사과 1개를 2명이 나눠 먹

으면 각자 사과를 얼마나 먹을까?’와 같은 단순한 계산조차 할 수 없었죠. 이는 곧 $\frac{1}{2}$ 같은 ‘유리수’가 등장하며 해결됩니다.

일차 방정식이 세는 것과 관련이 있었다면, 일차 방정식은 땅의 넓이, 삼차 방정식은 건물들의 부피를 통해 연구됐습니다. 그 과정에서 ‘무리수’도 생기게 됐습니다. 넓이가 $2m^2$ 인 땅의 한 변의 길이를 알려면 무리수가 필요하죠.

방정식과 수의 확장

이처럼 문제에 봉착할 때마다 수의 범위를 조금씩 늘려가며 수 체계를 만들어갔는데요, 0과 음수의 개념을 수로 확장하기까지는 오랜 시간이 걸렸습니다. 그 전까지의 수는 현실에서 발견할 수 있었는데, 음수는 그렇지 않았으니까요.

그런데 방정식, 나아가 대수학은 수를 현실 속 물리 세계에서 추상적 개념으로 바꿔주는 발상의 전환을 일으켰습니다. -5개의 사과를 실제로 보여줄 순 없지만, $x+5=0$ 이라는 방정식의 답으로써 있게 만들었죠. 모든 수는 이제 눈에 보이는 표

현의 제약에서 벗어나 어떤 방정식의 답으로 있게 된 겁니다.

그러나 수의 무한한 확장은 다시 큰 난관에 부딪힙니다. $x^2=-1$ 때문인데요, 이를 해결하기 위해 수학자는 앞서 그레왓트 수의 개념을 다시 확장했습니다. $i=\sqrt{-1}$ 이라는 ‘허수’를 출현시켰죠.

이차 방정식을 풀기 위해 허수를 도입하며 수학자들은 걱정에 빠졌습니다. 계속 이렇게 방정식의 차수를 높일 때마다 무한히 새로운 수들이 생겨나야 하는 걸까? 다행히 카를 프리드리히 가우스, 레온하르트 오일러 같은 위대한 수학자의 노력으로 모든 n 차 방정식의 근은 ‘복소수’, 다시 말해 실수와 허수만으로 나타낼 수 있다는 것이 증명됐습니다. 이는 수학사에서 가장 중요한 기본 정리 중 하나인 ‘대수학의 기본 정리’를 통해 보일 수 있는데, 간단히 말해 모든 n 차 방정식은 복소수 세계에서 중근을 포함한 n 개의 근을 갖고 있다는 정리입니다.

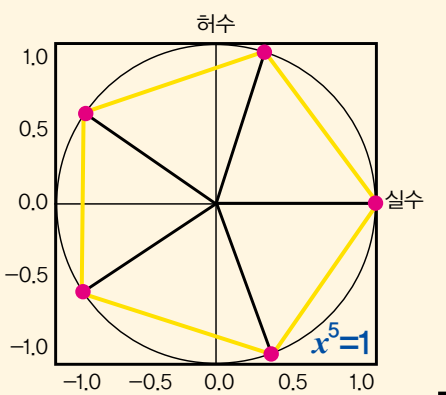
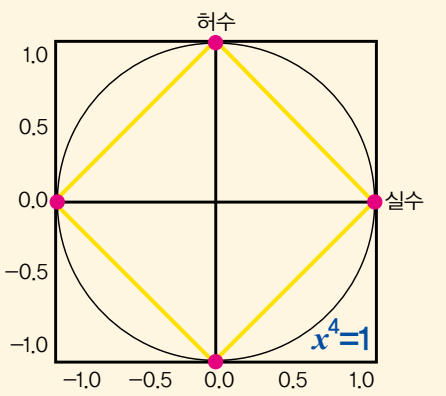
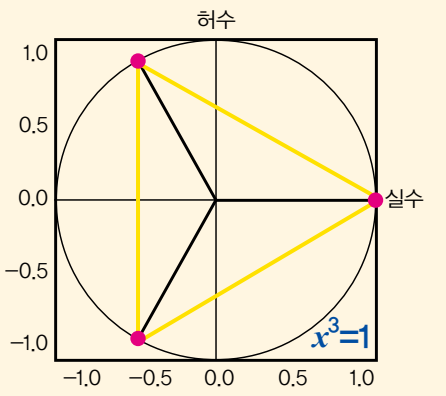
갈루아와 아벨, 비운의 천재

모든 n 차 방정식의 근을 복소수에서 찾을 수 있다면 근의 공식 역시 있지 않을까요? 일차와 이차 방정식의 근의 공식은 이미 오래전부터 알려져 있었습니다. 오랜 노력 끝에 3차와 4차 방정식의 근의 공식 역시 구할 수 있었죠. 그러나 수많은 수학자가 계속 도전해봐도 5차 방정식의 근을 구하는 일반적인 공식을 찾을 수 없었습니다.

군론을 얘기 할 때 절대 빠질 수 없는 두 천재 수학자 갈루아와 아벨은 이런 n 차 방정식들의 근의 대칭성을 보고, 곧 이 근들이 2월호에 소개한 정 n 각형 대칭군(S_n)을 이루고 있다는 것을 알아냅니다. 정 n 각형을 특정 각도나 축으로 회전하거나

방정식의 근이 만드는 대칭!

실수는 x 축, 허수는 y 축에 나타나는 복소평면에 n 차 방정식의 근들을 표현하면, 방정식의 근이 대칭성을 갖는 것을 알 수 있습니다.



정삼각형 대칭군(S_3)이란?

0° 또는 360° 회전이동	120° 회전이동	240° 회전이동
반사 ①	반사 ②	반사 ③

정삼각형은 이 6가지 대칭 움직임을 어떤 순서로 섞어서 여러 번 반복해도 이들 움직임 중 하나로 나와 정삼각형 대칭군(S_3)이라고 불러요.

반사했을 때 대칭이 되는 움직임들은 여러 번 섞어서 반복해 대칭시켜도 그 움직임 중 하나로 나타납니다. 이런 성질을 가진 구조들을 S_n 이라고 하죠.

이차 방정식 $ax^2+bx+c=0$ 은 두 개의 근 $\frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ 를 갖고 있는데요, 여기서 중요한 부분은 바로 $\pm \sqrt{b^2-4ac}$ 입니다. 마치 거울 반사처럼 $\sqrt{b^2-4ac}$ 가 답이면 $-\sqrt{b^2-4ac}$ 도 항상 답이죠. 바꿔 말하면 우리가 두 근의 부호를 서로 바꿔도 역시 똑같은 이차 방정식의 두 근이 됩니다. 이는 점이 두 개 있는 직선의 대칭(S_2)과 같습니다.

이를 바탕으로 갈루아와 아벨은 n 차 방정식의 일반적인 근의 공식을 구하는 일은 곧 근들이 이루는 정 n 각형 대칭군 S_n 의 구조를 이해하는 것과 같다는 것을 알게 됩니다. S_n 이 특정 조건을 만족하는 군일 때만 n 차 방정식의 근의 공식을 구할 수 있다는 사실을 증명해내죠.

수많은 시행착오 끝에 n 이 5보다 작은 경우인

S_2, S_3, S_4 일 때만이 이 특정 조건을 만족한다는 것을 밝혀내면서, 갈루아와 아벨은 각자 5차 혹은 그보다 높은 차수의 방정식이 근의 공식을 가질 수 없음을 증명합니다.

훗날 군론에서 이 특정 조건을 만족하는 군을 ‘가해군(Solvable group)’, 풀 수 있는 군이라고 부르게 된 것도 이 군들이 방정식을 풀기 위해 처음 사용했던 것에서 유래한 것입니다.

놀랍게도 갈루아와 아벨이 처음 군론을 이용해 방정식을 연구하려 했을 때는 군론이란 개념도, 대칭군이란 개념도 없었습니다. 반대로 이들이 방정식을 풀기 위해 처음 사용하게 된 대칭의 개념이 다듬어지고 정리돼 현대 수학의 군론이 되었죠.

에필로그

갈루아와 아벨 모두 생전에 본인의 업적을 인정받지 못하고, 죽고 나서야 그 업적의 가치를 인정받은 비운의 수학자예요. 실제로 수학자가 연구 결과를 인정받기 위해선 다른 동료 수학자들의 검증을 통과해야 합니다. 독창성과 우선순위가 중요해서, 때로는 비정한 혈투가 벌어지기도 하는데요, 5월호에선 수학자의 연구 결과가 인정받는 과정을 보여드리도록 하겠습니다.



노르웨이 오슬로 로열 펠릭스 공원에 있는 아벨 기념물이에요.