

# 슬7. 체스판과 도미노 소문제 2번 증명

(그림들은 첨부파일을 참고해주세요.)

일반성을 잃지 않고  $n$ 이 짝수이면서 가로 길이라고 가정할 수 있다. 이때 세로 길이인  $m$ 은 임의의 자연수가 될 수 있다. 다음의 용어들을 추가로 정의하자.

|         |  |
|---------|--|
| $H$ 도미노 | 가로(Horizontal)로 놓여 있는 도미노를 의미한다.   |
| $V$ 도미노 | 세로(Vertical)로 놓여 있는 도미노를 의미한다.   |
| 기본배열    | 모든 도미노가 $H$ 도미노인 배열이다. (Sin X님의 정의를 그대로 가져옴)   |
| 1행 문자열  | 어떤 배열에 대해, 그 배열이 놓인 체스판을 생각할 수 있다. 체스판의 1행(가장 위쪽 가로줄)에 걸쳐져 있는 도미노들을 왼쪽부터 순서대로 이름 읽은 것을 '1행 문자열'이라고 부른다.<br>예) 그림 0에서 'HHHVVV', 'HVVVHV' 등의 1행 문자열을 가지는 배열을 볼 수 있다. |

이제, 뒤집기만을 통해  $A$ 배열을  $B$ 배열로 바꿀 수 있을 때 ' $A$ 배열에서  $B$ 배열로 도달할 수 있다.'라고 하고, 기호로  $A \rightarrow B$ 라고 하자. 그러면 다음의 성질들을 알 수 있다.

- 만약  $A \rightarrow B$ 면  $B \rightarrow A$ 이다.  
 $\because$  뒤집기의 역과정도 역시 뒤집기이다. 따라서,  $A$ 에서  $B$ 에 도달하기 위해 시행한 뒤집기들을 거꾸로 시행하면  $B$ 에서  $A$ 에 도달하게 된다.
- 만약  $A \rightarrow B$ ,  $B \rightarrow C$ 이면  $A \rightarrow C$ 이다.  
 $\because$   $A$ 에서  $B$ 에 도달하기 위해 시행한 뒤집기와,  $B$ 에서  $C$ 에 도달하기 위해 시행한 뒤집기를 연속해서 시행하면 결국  $A$ 에서  $C$ 로 도달한 것이 된다.

증명에 앞서 Lemma(소정리) 두 개를 증명하자.

**Lemma 1.** 어떤 배열  $A$ 의 1행 문자열에 ' $\cdots HV \cdots$ '가 나타난다고 하자. 그러면, 다음의 조건을 만족시키는 배열  $B$ 가 존재한다.

$A \rightarrow B$ 이고,  $B$ 의 1행 문자열은  $A$ 의 1행 문자열에서 ' $HV$ '를 ' $VH$ '로 치환한 것이다.

**Proof)**  $A$ 의 1행 문자열에 ' $\cdots HV \cdots$ '가 나타난다는 뜻은,  $A$ 의 1행을 생각했을 때 그림 1의 위쪽 그림과 같은 부분이 존재한다는 것과 같다. Lemma 1은 사실, 그림 1의 위쪽 배열에서 그림 1의 아래쪽 배열로 도달할 수 있다는 것을 다른 말로 표현한 것이다.

그림 2를 보면 검은색 점이 있는 위치에 반드시  $H$ 도미노 또는  $V$ 도미노가 있어야 하므로 두 가지 경우로 나눌 수 있다.

- $H$ 도미노가 놓일 경우: 그림 3의 뒤집기를 통해 원하는 배열에 도달할 수 있다.

2)  $V$ 도미노가 놓일 경우: 그러면 도미노의 배열이 그림 4처럼 된다. 그림 5의 검은 점의 위치에 올 도미노를 생각해 다시 2-1과 2-2의 두 가지 경우로 나눌 수 있다.

- 2-1)  $V$ 도미노가 놓일 경우: 그림 6의 뒤집기를 통해 인접 위치를 바꿀 수 있다.
- 2-2)  $H$ 도미노가 놓일 경우: 그러면 도미노의 배열이 그림 7처럼 된다. 다시, 그림 8에서처럼 점의 위치에 올 도미노를 생각해 2-2-1과 2-2-2의 두 가지 경우로 나눌 수 있다. (이하 생략)

이렇듯 매 단계에서 가능한 경우 중 첫 번째에는 뒤집기를 통해 원하는 배열에 도달할 수 있고, 두 번째는 다시 두 가지 경우로 나뉜다. 이것이 계속 반복되는 구조이다. 그런데 두 번째 선택이 불가능한 경우가 반드시 오게 된다는 것에 주목하자. 계속 두 번째 경우를 따라가다 보면 도미노들이 오른쪽 위에서 왼쪽 아래 방향으로 계속 이어지는데, 체스판의 크기가 유한하므로 끝없이 이어지는 것은 불가능하다. 따라서 첫 번째 경우를 따라가는 시점이 생기고, 이때 뒤집기를 통해 인접 위치를 바꿀 수 있다. ■

**Lemma 2.** 어떤 배열  $A$ 의 1행 문자열에 ‘ $\cdots VV\cdots$ ’가 나타난다고 하자. 그러면, 다음의 조건을 만족시키는 배열  $B$ 가 존재한다.

$A \rightarrow B$ 이고,  $B$ 의 1행 문자열은  $A$ 의 1행 문자열에서 ‘ $VV$ ’를 ‘ $H$ ’로 치환한 것이다.

**Proof)** Lemma 2는 서로 인접해 있는 두 개의  $V$ 도미노의 자리에  $H$ 도미노를 배치할 수 있다는 것을 다른 말로 표현한 것이다. 그런데 두 개의  $V$ 도미노에 ‘가로로 뒤집기’를 시행하면 원하는 대로 되므로, 증명이 끝난다. ■

이제 본 증명을 할 수 있다.

**Theorem.**  $n \times m$  체스판에서, 모든 배열은 기본배열에 도달할 수 있다.

**Proof)**  $n \times m$  체스판 위 임의의 배열  $A_0$ 를 생각하자. 그리고  $A_0$ 의 1행 문자열에  $H$ 와  $V$ 가 나타난 횟수를 각각  $H(A_0)$ ,  $V(A_0)$ 라고 하자. 체스판의 가로 길이를 생각하면  $2H(A_0) + V(A_0) = n$ 이므로  $V(A_0)$ 가 짝수라고 할 수 있다. Lemma 1을 반복해서 적용하면 다음의 조건을 만족하는  $A'$ 가 존재함을 알 수 있다.

$A_0 \rightarrow A'$ 이고  $A'$ 의 1행 문자열은 ‘ $\underbrace{VV \cdots V}_{V(A_0)\text{개}} \underbrace{HH \cdots H}_{H(A_0)\text{개}} H$ ’이다.

그 다음에 Lemma 2를 반복해서 적용하자.  $V(A_0)$ 가 짝수이므로, 앞쪽부터  $V$ 를 두 개씩  $H$ 로 바꿔줄 수 있다. 따라서 1행 문자열이 ‘ $H \cdots H$ ’인 배열  $A_1$ 이 존재해  $A' \rightarrow A_1$ 이다. 따라서 우리는 임의의 배열에 대해, 그것으로부터 1행 문자열이  $H$ 로만 이루어진 배열에 도달할 수 있음을 보였다.

1행 문자열이  $H$ 로만 이루어졌다는 것의 의미를 생각해보면, 1행에  $H$ 도미노만이 존재한다는 것이다. 그 1행을 무시하고 2행부터  $m$ 행까지를 ‘새로운 체스판’으로 생각할 수 있다. 여전히 가로 길이인  $n$ 은 짝수고 세로 길이인  $m$ 은 자연수라는 조건을 만족시킨다. ‘새로운 체스판’의 1행, 즉 원래 체스판의 2행을 모두  $H$ 도미노로 채울 수 있다. 또 3행부터  $m$ 행까지를 ‘새로운 체스판’으로 생각하여 원래 체스판의 3행을  $H$ 도미노로 채운다. 이것을 반복하면 원래 체스판의 전체를  $H$ 도미노 채우게 되므로 기본배열에 도달할 수 있다. 바꿔 말하면, 1행부터 아래쪽으로 계속하여 ‘분배선’(Sin X님의 정의)을 만들어서 결국 기본배열에 도달하게 되는 것이다. ■

이처럼 모든 배열이 기본배열에 도달할 수 있다는 것을 보였다. 어떤 두 배열  $A, B$ 에 대해, ‘ $A \rightarrow$ 기본배열’이고 ‘ $B \rightarrow$ 기본배열’이므로, ‘ $A \rightarrow$ 기본배열  $\rightarrow B$ ’이다. 따라서 모든 배열은 서로 도달할 수 있다. ■