



14차전

정육면체 속 정육면체와
기사의 새로운 여행

POLY MATH

폴리매스 프로젝트

글 김우현 기자(mnchoo@donga.com) 일러스트 문민호

-  에취! 새 학기가 시작되자마자 감기라니, 도대체 봄은 언제 오는 걸까요? 날씨가 따뜻해야 머릿도 잘 돌아가고 폴리매스 문제도 잘 풀 수 있을 텐데~. 훌쩍.
-  내 목표는 봄이 오기 전에 폴리매스 미해결 문제를 모두 푸는 것! 이번에 대한수학회에서 낸 문제 3개 중 3번은 수학계에서도 미해결 문제예요. 1, 2번은 3번을 풀기 위한 워밍업이랄까? 자, 3번 문제에 '봄'을 가져다줄 친구들을 위해 문제를 소개해볼까요! 수학군?
-  세 문제 모두 비슷해서 1번 문제만 잘 이해하면 다른 문제도 쉽게 이해할 수 있을 거예요. 일단 정사각형 색종이를 가로세로로 정확히 반씩 접었다 펴서 4등분했다고 생각해 보죠. 접기 전에는 점이 꼭짓점 4개뿐이었는데, 가운데 접은 선이 만나는 점과 접은 선이 각 변을 이등분하는 점이 추가돼서 점이 9개가 됐어요. 이렇게 한 변의 길이가 n 인 정사각형을 n^2 등분해서 만들어진 점들 중에 4개를 뽑아 사각형을 만들었을 때 정사각형이 되는 경우의 수를 구하는 거죠!
-  비슷한 방법으로 2번은 정삼각형에서, 3번은 정육면체를 분할한 뒤 점 8개를 골랐을 때 정육면체가 되는 경우의 수를 구하는 문제지요. 단, 1, 2번은 n 이 1부터 12345인 경우, 3번은 123인 경우까지 모두 구해서 더해야 한다는 게 함정...!

-  문제를 올리자마자 수학장 친구가 1번 문제의 풀이를, 여백 페르마 친구는 단번에 3번 문제의 풀이를 올렸어요. 다른 친구들도 댓글로 별다른 오류가 없다고 하며 이번 문제는 조금 쉬운 것 같다는 의견을 남겼네요. 자, 과연 정답일 것인가~?
-  순조로운 게시판에 팩트 폭행을 한 친구가 있었으니... 다른 아님 수학자 친구! 수학자 친구는 새롭게 만든 정사각형, 정삼각형, 정육면체의 한 변의 길이가 꼭 자연수일 필요는 없다고 지적했어요. 수하가 예로 든 색종이에서 각 변을 이등분하는 점을 이으면 한 변이 $\sqrt{2}$ 이고 기울어진 정사각형이 만들어지죠. 이것을 세지 않아서 쉽게 풀렸던 거예요!
-  수학자 친구의 의견을 접수한 우리의 친구들! 곧바로 정답으로 갈 수 있는 단초가 나타났어요. ssamtkwon 친구가 정사각형이 똑바로 서있는 경우와 기울어져 있는 경우를 나눠서 세는 여백 페르마 친구의 아이디어를 이용해 구체적인 식을 구했어요.
-  기울어진 경우와 그렇지 않은 경우를 따로 구한 뒤 합하면, 길이가 m 인 정사각형에 꼭 끼는 정사각형을 m 개 만들 수 있어요. 꼭 낀다는 건 4개의 꼭짓점이 원래 정사각형의 변 위에 있다는 뜻이에요. 그리고 이 정사각형은 한 변의 길이가 n 인 정사각형 안에 $(n-m+1)^2$ 번 나오니까 $f(n) = \sum_{m=1}^n m(n-m+1)^2$ 가 되는 거지요. 이 식을 정리한 뒤 다시 $\sum_{n=1}^{12345} f(n)$ 을 구해야 진짜 정답입니다. 산 넘어 산이네요!
-  이때, 수학자 친구가 $\sum_{i=1}^n i(i+1)(i+2)\dots(i+k-1) = \frac{n(n+1)(n+2)\dots(n+k)}{k+1}$ 라는 사실을 이용해 $\sum_{n=1}^N f(n)$ 을 $\frac{N(N+1)(N+2)(N+3)(2N+3)}{120}$ 으로 깔끔하게 정리했어요. 이로써 1번 문제는 해 to the 결!
-  친구들은 2, 3번 문제도 정삼각형 또는 정육면체에 꼭 끼는 정삼각형 또는 정육면체의 수를 세려고 했지만, 1번처럼 간단하지가 않은 것 같아요.
-  풀이가 점점 흥미진진합니다! 수학자 친구는 벡터를 이용해 접근했어요. 정육면체를 분할해서 생기는 점을 3차원 벡터로 나타낸 뒤, 서로 수직이면서 길이가 같고, 성분이 모두 정수인 세 벡터를 찾자는 거지요.
-  구며 친구는 이런 조건을 만족하는 세 벡터의 공통점을 찾아 일반항을 몇 개 찾고, muse 친구는 $f(n)$ 과 $f(n+1)$ 의 관계를 점화식으로 나타냈어요. 여백 페르마 친구는 벡터를 사용하지 않는 풀이를 시도하고 있군요. 다양한 아이디어가 뿔어져 나오고 있습니다! 어서 14번 문제에 봄이 오길~!

주정훈 멘토에 따르면 아직 2~3번을 풀 수 있는 아이디어는 나오지 않았다고 해요!



